15.10.20

Άμεση Ολοκλήρωση - Χωρισμός μεταβλητών.

1. Για την διαφορική εξίσωση $y'(t)=k$, $t\in I\subseteq \mathbb{R}$
είναι $y(t)=\int y'(t)d(t)= kt+c$, $t\in I$ ή

$$y(t)=y(t_0)+\int_{t_0}^{t} k\,ds = y(t_0)+k(t-t_0),\ t\in I$$

2. Για την διαφορική εξίσωση $y'(t)=f(t)$, $t\in I\subseteq \mathbb{R}$
είναι $y(t)=\int y'(t)ds = \int f(t)\,ds = \int f(t)dt + c$, $t\in I$ ή

$$y(t)=y(t_0)+\int_{t_0}^{t} f(s)ds,\ t\in I$$

Πx) Για την διαφ. εξίσωση $y'(t)=6t^2$, $t\geq 0$ είναι
$y(t)=\int y'(t)\,dt = \int 6t^2\,dt + c = 2t^3+c$, $t\geq 0$ ή με ορισμένη ολοκλ/ση:

$$y(t)=y(t_0)+\int_{t_0}^{t}(6s^2)ds = y(t_0)+2(t^3-t_0^3),\ t\in I$$

Πx) **Πρόβλημα Αρχικών Τιμών.**
Να βρεθούν οι λύσεις της εξίσωσης $y'(t)=6t^2$, $t\geq 0$ με $y(1)=7$.
Είναι $y(t)=\int 6t^2\,dt + c = 2t^3+c$, $t\geq 0$

$y(1)=7=2\cdot 1^3+c=2+c \Rightarrow c=5$ ή με ορισμένη ολοκλήρωση:
$$y(t)=y(1)+\int_{1}^{t}(6s^2)ds = 7+2(t^3-1) = 5+2t^3,\ t\in I$$

3. Για την διαφορική εξίσωση $y''(t)=f(t)$, $t\in I\subseteq \mathbb{R}$

είναι $y'(t)=\int y''(s)\,ds=\int f(s)\,ds+c_0$, $t\in I$

και $y(t)=\int y'(s)\,ds=\int\int f(s)\,ds+c_0t+c_1$, $t\in I$

ή $y'(t)=y'(t_0)+\int_{t_0}^{t} f(s)ds$, $t\in I$

και $y(t)=y(t_0)+y'(t_0)(t-t_0)+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} f(u)\,du\,ds$, $t\in I$

Πχ Για τις λύσεις της εξίσωσης $y''(t)=6t^2$, $t\geq 0$ με $y(1)=7$, $y'(1)=2$:

$y(t)=y(1)+y'(1)(t-1)+\int_{1}^{t}\int_{1}^{s} 6u^2\,du\,ds$, $t\geq 0$

Πχ **Πρόβλημα Αρχικών Τιμών:**

Να βρεθούν οι λύσεις της εξίσωσης με συνθήκη: $y(t_0)=y_0$, $y'(t_0)=y_1$

4. Για την διαφορική εξίσωση: $y^{(n)}(t)=f(t)$, $t\in I\subseteq\mathbb{R}$

που ικανοποιούν την συνθήκη $y(t_0)=y_0, y'(t_0)=y_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0)=y_{n-1}$

5. Για την διαφορική εξίσωση $y'(t)=(t^2+t)(y^2(t)+1)$, $t\in I\subseteq\mathbb{R}$

έχουμε $\int_{t_0}^{t}\frac{y'(s)}{y^2(s)+1}\,ds=\int_{t_0}^{t}(s^2+s)\,ds$, $t\in I\subseteq\mathbb{R}$ απ' όπου για

$z=y(t)$: $\int_{y(t_0)}^{y(t)}\frac{dz}{z^2+1}=\int_{t_0}^{t}(s^2+s)\,ds$, $t\in I\subseteq\mathbb{R}$

όπου $\text{Arctg}\,y(t)=\text{Arctg}\,y(t_0)+\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}-\frac{t_0^3}{3}-\frac{t_0^2}{2}$

και $y(t)=tg\left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+c\right)$

6. Γενικότερα, για την εξίσωση $y'(t)=f(t)g(y)$, $t\in I$, $(g(y)\neq 0)$ που ικανοποιούν την συνθήκη $y(t_0)=y_0$ είναι $\int_{t_0}^{t} \frac{y'(s)}{g(y(s))}ds = \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds$, $t\in I$

$z=y(t)$: $\int_{y(t_0)}^{y(t)} \frac{dz}{g(z)} = \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds$, $t\in I$

όπου: $G(y(t))-G(y(t_0))=F(t)-F(t_0)$
και $y(t)=G^{-1}[G(y(t_0))+F(t)-F(t_0)]$, G^{-1} αντίστροφη της G

Παρατήρηση: Για $z=ax+by+z$, έχουμε $z'=a+by'$ και η εξίσωση $y'=f(ax+by+z)$ γίνεται $a+by'=f(z)$ που είναι χωριζομένων μεταβλητών.

Πχ Για την εξίσωση $y'=\sqrt{x+y+1}-1$, θέτοντας $z=ax+by+z$, $z\geq 0$ έχουμε $z'=z \Rightarrow z^{-1/2}z\,dz \Rightarrow 2z^{1/2}=x+c$, $x+c\geq 0$ απ' όπου προκύπτει $y(t)=\frac{(x+c)^2}{4}-(x+1)$, $x\geq -c$ που είναι η γενική λύση της εξίσωσης.
Παρατηρήστε ότι για $x+y+1=0$, έπεται αμέσως ότι η συνάρτηση $y=-x-1$, $x\in\mathbb{R}$ είναι λύση της εξίσωσης που δεν περιγράφεται από τον γενικό τύπο (ιδιάζουσα λύση).
Επίσης, παρατηρείστε τα π.ο. των γενικών λύσεων και την αρχή των τροχιών τους.

Εφαρ: Να περιγραφεί η κίνηση ενός κινητού που αφήνεται να πέσει στο πεδίο βαρύτητας της γης, αν είναι γνωστό ότι η αντίσταση του αέρα είναι ανάλογη της ταχύτητας του κινητού.
$m\gamma = mg - ku \Rightarrow u' = g - \frac{k}{m}u$ απ' όπου

$\int \frac{du}{g-\frac{k}{m}u} = \int 1 = t$ και $u(t)=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$

Άσκηση: Να βρεθεί η εξίσωση της κίνησης αν η αρχική ταχύτητα του κινητού είναι u_0. Σε πόσο χρόνο θα φτάσει στο έδαφος αν το αρχικό ύψος είναι s_0; Να γίνει μία εκτίμηση της ταχύτητας με την οποία χτυπά το έδαφος αν θεωρηθεί ότι το αρχικό ύψος θεωρηθεί "πολύ μεγάλο".

Ομογενείς Εξισώσεις

Μία συνάρτηση $f(x,y)$ καλείται ομογενής n-βαθμού αν $f(kx,ky)=k^n f(x,y)$

Πχ $f(x,y)=3x^2y^3+2xy^4+y^5$

1. Θεωρούμε την εξίσωση: $y'=\dfrac{g(x,y)}{f(x,y)}$ με f,g ομογενείς συν/σεις του ίδιου βαθμού ομογένειας.

Για $z=y/x$, έχουμε: $y'=z+xz'=\dfrac{g(x,x(y/x))}{f(x,x(y/x))}=\dfrac{x^k g(1,z)}{x^k f(1,z)}$

και $xz'=\dfrac{g(1,z)}{f(1,z)}-z$ απ' όπου $\dfrac{dz}{\frac{g(1,z)}{f(1,z)}-z}=\dfrac{dx}{x}$

Πχ 2, σελ. 40

Να επιλυθεί η εξίσωση $(x^2+y^2)dx+2xy\,dy=0$, $x>0$, $y\neq 0$.

Έχουμε $y'=-\dfrac{x^2+y^2}{2xy}$ και $xz'=-\dfrac{1+3z^2}{2z}\Rightarrow \dfrac{2z}{1+3z^2}dz=-\dfrac{1}{x}dx$

$\Rightarrow \ln(1+3z^2)=-3\ln x+c \Rightarrow \ln(1+3z^2)+3\ln x=c$

$\Rightarrow (1+3(y/x)^2)x^3=e^c=C\neq 0$

και $y^2(x)=\dfrac{C-x^3}{3x}$, όπου $y_1(x)=\sqrt{\dfrac{C-x^3}{3x}}$, $y_2(x)=-\sqrt{\dfrac{C-x^3}{3x}}$, $x>0$

ΑΣ.Α-9: Αν $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, να επιλυθεί η εξίσωση: $y' = \frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$
(λυμ.)

Για $x = X + x_0$, $y = Y + y_0$, όπου x_0, y_0 είναι λύση συστήματος
$a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$
έχουμε: $Y' = \frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}$ που είναι ομογενής εξίσωση πρώτης τάξης

ΑΣ.Α-7: Επίλυση της $(x+2y-3)y' + x - y + 3 = 0$, $t = x+a$, $z = y+\beta$
(αλυτ.) $(x+2y-3)y' + x - y + 3 = 0$

$\Rightarrow (x+2y-3)y' = -x+y-3$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x+y-3}{x+2y-3}$

Είναι: $x+2y=3$, $x-y=-3 \Rightarrow x_0=-1$, $y_0=2$

Για $X = x+1$, $Y = y-2$, έχουμε $dX = dx$, $dY = dy$. και

$\frac{dY}{dX} = \frac{X+1-(Y+2)+3}{-X+1-2(Y+2)+3} = \frac{-X+Y}{X+2Y}$ που είναι μία ομογενής εξίσωση.

Θέτοντας $z = Y/X$, βρίσκουμε:

$Xz' + z = Y' = \frac{dY}{dX} = \frac{X(-1+\frac{Y}{X})}{X(1+2\frac{Y}{X})} = \frac{z-1}{1+2z}$ και

$Xz' = \frac{z-1}{1+2z} - z = \frac{-1-2z^2}{1+2z} \Rightarrow \frac{(1+2z)\,dz}{1+2z^2} = -\frac{dX}{X}$

$\Rightarrow \int = \frac{(1+2z)\,dz}{1+2z^2} = \int -\frac{dX}{X} + c$, απ' όπου έχουμε:

$\sqrt{2}\,\mathrm{Arctg}\left(\frac{y-2}{x+1}\sqrt{2}\right) + \log[(x+1)^2 + 2(y-2)^2] = C$

$\boxed{\text{Παρατηρήσεις}}$:

- π.α.τ.
- φράγματα
- πεδία ορισμού λύσεων

Άσκηση: Παράδειγμα 2, σελ. 40: Λύση με ορισμένη ολοκλήρωση.
Άσκηση: A-13, Φυλ. Λυμ. Ασκ.

$$y' = \frac{x+y+1}{x+2} - e^{\frac{x+y+1}{x+2}}$$

Η ομογενής δ.ε. πρώτης τάξης:

$y'(t) + p(t)\,y(t) = 0,\ t \in I$

- Η μηδενική λύση: $y(t) = 0,\ t \in I$
- Αν $y(t_0) = 0$ για κάποιο $t_0 \in I$, τότε για $t \in I_1 \subseteq I$ με $y(t) \neq 0,\ t \in I_1$:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{y'(s)}{y(s)}\,ds = -\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds$$

$$\log|y(t)| - \log|y(t_0)| = -\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds$$

$$\Rightarrow \log\frac{|y(t)|}{|y(t_0)|} = -\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds \quad \text{και} \quad y(t) = y(t_0)\,e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds},\ t \in I$$

Με αόριστη ολοκλήρωση παίρνουμε: $y(t) = C' e^{-\int p(t)\,dt},\ t \in I$
Παρατηρούμε ότι η παραπάνω φόρμουλα για $y(t_0) = 0$ δίνει την μηδενική λύση $y \equiv 0$. Προκύπτει ότι:

Πρόταση: Όλες οι λύσεις της ομογενούς δ.ε. 1ης τάξης δίνονται από τους παραπάνω τύπους.

Παρατηρήσεις:
- Επιβεβαίωση με παραγώγιση
- $D_y = I$
- $y(t) \neq 0,\ t \in I$ - λύσεις σταθερού προσήμου
- Η μηδενική λύση είναι η μοναδική λύση που μηδενίζεται σε κάποιο σημείο του I.

Πρόταση: Το π.α.τ. $y'(t) + p(t)\,y(t) = 0,\ y(t_0) = y_0,\ t \in I$
έχει ακριβώς μία λύση στο I για όποια αρχική τιμή $y_0 \in \mathbb{R},\ t_0 \in I$

Απόδειξη: Μία λύση του π.α.τ. είναι η $y(t) = y_0 e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds},\ t \in I$. Αν y_1 είναι μία άλλη λύση του π.α.τ. τότε η $u = y - y_1$ είναι μία λύση της εξ. που μηδενίζεται στο t_0 $\Rightarrow$ θα είναι $u = 0$.